CONCOURS D'ENTREE A L'ECOLE DES INGENIEURS
DE LA VILLE DE PARIS
ouvert le 26 avril 1994

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES
OPTION M
(durée 4 H - coefficient 6)

Le sujet comprend 3 pages dactylographiées.

Soit n un nombre entier naturel non nul.

PARTIE I

On note G_n l'ensemble des n racines $n^{ièmes}$ de l'unité. Avec des notations usuelles, on écrira par exemple :

$$\sum_{\alpha \in G_3} \frac{\alpha}{x-\alpha} = \sum_{\alpha^3=1} \frac{\alpha}{x-\alpha} = \frac{1}{x-1} + \frac{j}{x-j} + \frac{j^2}{x-j^2} \quad \text{où } j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

1. Expliciter le monôme $A(x)$ tel que :

$$\sum_{\alpha^3=1} \frac{\alpha}{x-\alpha} = \frac{A(x)}{x^3-1}$$

2. Pour $n \geq 7$, trouver $B(x)$ tel que :

$$\sum_{\alpha^n=1} \frac{\alpha^7}{x-\alpha} = \frac{B(x)}{x^n-1}$$

Plus généralement, soit p un nombre entier tel que $1 \leq p \leq n$. Trouver $B_p(x)$ tel que :

$$\sum_{\alpha^n=1} \frac{\alpha^p}{x-\alpha} = \frac{B_p(x)}{x^n-1}$$

3. On pose $\quad y = \sum_{\alpha^{15}=1} \frac{\alpha^3}{x-\alpha^6}$

a) Écrire y sous la forme d'une fraction irréductible.

b) Développer y en série entière de terme général $a_n x^n$.

c) Le nombre x étant réel, on pose $\quad Y = \int_0^x y(t)\,dt$

Développer Y en série entière de terme général $b_n x^n$.

d) Le nombre x étant complexe, comparer les domaines de convergence des deux séries obtenues en *b*) et en *c*).

4. Soit k un nombre entier tel que $1 \leq k \leq 15$. On pose $\quad y_k = \sum_{\alpha^{15}=1} \frac{\alpha^k}{x-\alpha^6}$

Donner comme dans la question 3. *a*) l'expression irréductible de la fraction y_k.

PARTIE II

Soit θ un nombre réel. On pose $\beta = e^{i\theta}$.

1. Décomposer en éléments simples sur le corps des complexes la fraction rationnelle en x :

$$H(\theta) = h(e^{i\theta}) = h(\beta) = \frac{2(x^2 - 1)\cos 5\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

2. Pour $|x| < 1$, on pose :

$$\sigma_n = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} h\left(e^{ik\pi/n}\right) \quad \text{et} \quad \delta_n = \frac{\pi}{n}\sum_{\beta^{2n}=1} h(\beta)$$

a) Comparer σ_n et δ_n.

b) Déterminer les limites de σ_n et δ_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Quelles limites obtiendrait-on en remplaçant cos 5θ par cos $p\theta$ dans $H(\theta)$, où p est un nombre entier naturel ?

PARTIE III

Toujours pour $|x| < 1$, on considère la série de Fourier de terme général :

$$\left(\int_0^{\pi} \frac{\cos kt}{1 - 2x\cos t + x^2}\,dt\right)\cos k\theta \qquad \text{où } k \in \mathbf{N}$$

1. Expliciter l'intégrale précédente en fonction de x.

2. Cette série converge-t-elle uniformément en θ pour $|x| < 1$?

3. Cette série converge-t-elle uniformément en θ et en x pour $|x| \leq a < 1$, où a est un nombre réel strictement positif ? Même question pour $|x| < 1$.

4. Développer sa somme $S(\theta, x)$ en série entière de x.

PARTIE IV

Développer en série entière : (de la variable x)

$$K(\theta, x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{1 - x^3}\cos p\theta$$

PARTIE V

Pour tout nombre entier naturel n, $E\left(\frac{n}{5}\right)$ représente la partie entière de $\frac{n}{5}$.

On considère la suite de terme général :

$$\frac{\sin\left[\left(1+E\left(\frac{n}{5}\right)\right)\frac{5\theta}{2}\right]\cos\left[\left(2n-5E\left(\frac{n}{5}\right)\right)\frac{\theta}{2}\right]}{\sin\frac{5\theta}{2}}$$

On désigne par $m_n(\theta)$ cette fonction prolongée éventuellement par continuité. Pour $|x|<1$, on pose :

$$M(\theta,x)=\sum_{k=0}^{+\infty} m_k(\theta)x^k$$

1. A-t-on $M(\theta,x)=M(-\theta,x)$?

2. Développer $M(\theta,x)$ en série de Fourier sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta$$

Déterminer le domaine de convergence de cette série.